
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

SINGOLARITA' DELLE SOLUZIONI DI PROBLEMI AL CONTORNO

17 Febbraio 1983 - ore 16

24 Febbraio 1983 - ore 16

0. INTRODUZIONE

Scopo di questo seminario è una introduzione ai metodi di analisi microlocale nello studio delle singolarità (C^∞) per soluzioni di problemi al contorno relativi ad ampie classi di equazioni e sistemi non ellittici.

Preliminarmente occorre chiarire che tipo di "singolarità" si vogliono esaminare. La prima parte dall'esposizione è quindi dedicata all'esame di una nozione di "fronte d'onda" per distribuzioni su una varietà con bordo. Nella seconda parte tratteremo alcuni problemi al contorno non ellittici.

1. VARIE NOZIONI DI FRONTE D'ONDA

Ricordiamo la nota definizione di $WF(u)$ ("fronte d'onda" di u) per una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(U)$, U aperto di R^N .

Detto $T^*U (= U \times R^N)$ il fibrato cotangente su U , si dirà che un punto $(z_0, \zeta_0) \in T^*U \setminus 0$ (i.e. $\zeta_0 \neq 0$) non sta in $WF(u)$ se esistono $\phi \in C_0^\infty(U)$, $\phi(z_0) \neq 0$, ed un intorno conico Γ di ζ_0 , $\Gamma \subset R^N \setminus 0$, tali che per ogni $k \geq 0$ si abbia:

$$(1.1) \quad \sup_{\zeta \in \Gamma} (1+|\zeta|)^k |\langle u, e^{-i z \cdot \zeta} \phi(z) \rangle| < +\infty$$

E' facile vedere che:

- i) $WF(u) \subset T^*U \setminus 0$ è un chiuso conico (conico significa che $(z, \zeta) \in WF(u) \Rightarrow (z, \lambda \zeta) \in WF(u), \forall \lambda > 0$).
- ii) Se $\pi : T^*U \longrightarrow U$ è la proiezione conica, $\pi(WF(u)) = \text{sing supp}(u)$.

Un fatto importante è il seguente:

Sia $f : V \longrightarrow U$ è un diffeomorfismo C^∞ tra aperti di R^N .

Restano definite:

- a) $f^* : T^*U \xrightarrow{\sim} T^*V$, $f^*((f(y), \eta)) = (y, {}^t df(y)\eta)$;
 b) $f_* : \mathcal{D}'(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'(V)$, $\langle f_*(u), \phi(y) \rangle =$
 $= \langle u, \phi(f^{-1}(z)) |J_f^{-1}(z)| \rangle$, $\phi \in C_0^\infty(V)$.

Ebbene non è difficile provare che si ha:

$$(1.2) \quad WF(f_*(u)) = f^*(WF(u)), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(U).$$

La (1.2) autorizza a definire il fronte d'onda di una distribuzione u su una varietà (C^∞) senza bordo X nel modo seguente. Sia T^*X il fibrato cotangente su X ; diremo che un punto $(z_0, \zeta_0) \in T^*X \setminus 0$ (i.e. $\zeta_0 \neq 0$) non sta in $WF(u)$ se presa una parametrizzazione locale $h : V \longrightarrow U \subset X$ (con V aperto di R^N , $N = \dim X$), detto $h_*(u) \in \mathcal{D}'(V)$ il pull-back di u e detta $h^* : T^*_U X \xrightarrow{\sim} T^*V$ la mappa indotta, si ha $h^*(z_0, \zeta_0) \notin WF(h_*(u))$.

Utilizzando (1.2) si riconosce che la definizione data è ben posta e che $WF(u) \subset T^*X \setminus 0$ ha ancora le proprietà i) ed ii).

Veniamo ora al caso di una varietà (C^∞) con bordo M , $n+1$ -dimensionale, che supponiamo senz'altro sottovarietà di una varietà chiusa X , $n+1$ -dimensionale con $\partial X = \emptyset$.

Il modello locale (cui localmente ci si può ridurre) e, naturalmente, $X = R_x^1 \times R_y^n$, $M = R_+^{n+1} = \{(x,y) \in X | x \geq 0\}$; è però opportuno non limitarsi sin dall'inizio al solo modello locale. Innanzi tutto cosa dobbiamo intendere per distribuzione su M ?

Se prendiamo come spazio di funzioni test lo spazio $C_{(0)}^\infty(M)$ delle funzioni C^∞ su M ed a supporto compatto, possiamo considerare lo spazio $\dot{\mathcal{D}}'(M)$ duale (forte o debole poco importa) di $C_{(0)}^\infty(M)$. È facile vedere che $\dot{\mathcal{D}}'(M)$ è canonicamente identificabile con $\mathcal{D}'_M(X) = \{v \in \mathcal{D}'(X) | \text{supp}(v) \subset M\}$. Infatti per un teorema di R. Seeley si può costruire una

mappa continua $e: C_{(0)}^{\infty}(M) \longrightarrow C_0^{\infty}(X)$ tale che:

1) $e(f)|_M = f$; 2) se $\text{supp}(f) \subset M \setminus \partial M = \overset{\circ}{M}$, allora $e(f) \in C_0^{\infty}(\overset{\circ}{M})$.

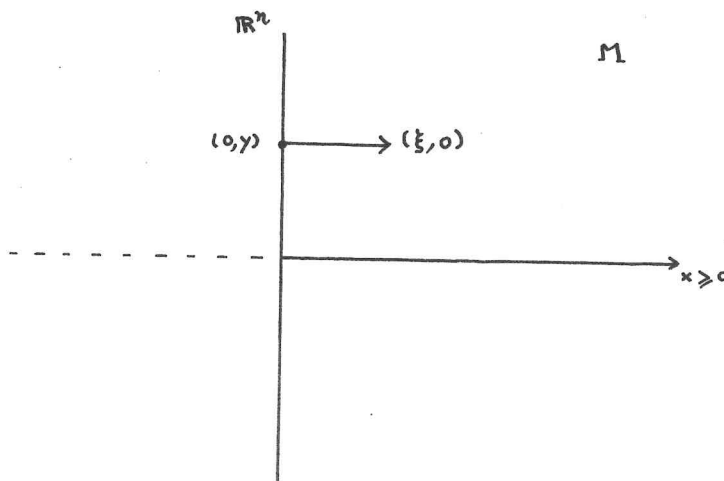
Basterà allora definire $j: \mathcal{D}'_M(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$ ponendo $\langle j(v), f \rangle = \langle v, e(f) \rangle$ e verificare che j è un isomorfismo. Si noti che $C_{(0)}^{\infty}(M) \subset \mathcal{D}'(M)$, associando ad $f \in C_{(0)}^{\infty}(M)$ la distribuzione:

$$(1.3) \quad \langle u_f, \phi \rangle = \int_M f \phi \, d\mu \quad (d\mu \text{ è una densità } C^{\infty} \text{ e } > 0 \text{ fissata})$$

Occorre però fare attenzione al fatto che se v è un campo vettoriale (C^{∞}) su M non si ha in generale $v(u_f) = u_{v(f)}$ (a causa della presenza di ∂M nell'integrazione per parti!).

Essendo, per abuso, $\mathcal{D}'(M) = \mathcal{D}'_M(X)$ è chiaro che per ogni $u \in \mathcal{D}'(M)$ resta definito $WF(u) \subset T^*_M X \setminus 0 \subset T^*M \setminus 0$. Tuttavia questa nozione è largamente insoddisfacente. Ecco il motivo.

Prima una nozione. Sia $i: \partial M \rightarrow M$ l'inclusione; allora è definita $i^*: T^*_{\partial M} M \longrightarrow T^*\partial M$ (i^* è suriettiva); per definizione $(i^*)^{-1}(0) = N^*\partial M$ è detto il fibrato conormale a ∂M . Per chi non ama l'astratto, se $X = \mathbb{R}^{n+1}_{(x,y)}$ e $M = \{(x,y) | x \geq 0\}$, $N^*\partial M = \{(x,y;\xi,\eta) \in T^*M | x=0, \eta=0\}$.



Ora se $f \in C_{(0)}^{\infty}(M)$ è immediato vedere che in generale sarà $WF(u_f) \cap N^*\partial M \neq \emptyset$, e quindi $WF(u_f) \neq \emptyset$, mentre "ragionevolmente" u_f non ha singolarità in M !

E' allora opportuno considerare il sottospazio $C_0^{\infty}(M)$ di $C_{(0)}^{\infty}(M)$ fatto dalle f che sono piatte su ∂M (i.e. sono nulle su ∂M con ogni loro derivata). Il duale (forte o debole) $\mathcal{D}'(M)$ di $C_0^{\infty}(M)$ è detto lo spazio delle distribuzioni prolungabili. E' infatti chiaro che $C_0^{\infty}(M)$ è la chiusura in $C_0^{\infty}(X)$ di $C_0^{\infty}(M)$ e dunque per ogni $u \in \mathcal{D}'(M)$ esiste $v \in \mathcal{D}'(X)$ per cui $\langle v, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$ quale che sia $\phi \in C_0^{\infty}(M)$. Utilizzando Hahn-Banach è immediato riconoscere che esiste una mappa $\mathcal{D}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'_M(X)$, $u \longmapsto \tilde{u}$ detta il prolungamento con lo zero (questo perché se $f \in C_{(0)}^{\infty}(M)$, $\tilde{f} = f$ in M e $\tilde{f} = 0$ in $X \setminus M$).

Se $u \in \mathcal{D}'(M)$ definiremo:

$$(1.4) \quad WF(u) = \bigcap_{\substack{v \in \mathcal{D}'(X) \\ v \text{ prolunga } u}} WF(v)$$

E' chiaro che $WF(u)$ è allora un chiuso conico di $T^*M \setminus 0$ (tra le v che prolungano u c'è anche \tilde{u} !).

Che differenza c'è tra $\dot{\mathcal{D}}'(M)$ e $\mathcal{D}'(M)$? E' chiaro che per restrizione avremo una suriezione:

$$(1.5) \quad \dot{\mathcal{D}}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(M) \longrightarrow 0$$

Ma (1.5) non è iniettiva. Anzi il nucleo è $\dot{\mathcal{D}}'_{\partial M}(M) = \{u \in \dot{\mathcal{D}}'(M) \mid \text{supp}(u) \subset \partial M\}$, i.e., c'è la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \dot{\mathcal{D}}'_{\partial M}(M) \longrightarrow \dot{\mathcal{D}}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(M) \longrightarrow 0$$

N.B. Nel caso locale: se $f(x,y)=1$, si ha $u_f = Y(x) \otimes 1_y$ e quindi $WF(u_f) = N^*\partial M \setminus 0$, mentre $WF(f) = \emptyset$, perchè tra i prolungamenti di f c'è la funzione identicamente 1.

Facciamo ora un'osservazione a proposito di (1.4). Sia $u \in \mathcal{D}'(M)$ e supponiamo che u sia C^∞ al bordo. Questo vuol dire che c'è un intorno aperto Ω di ∂M in M ed una $f \in C^\infty(\Omega)$ per cui $\langle u, \phi \rangle = \int_M f \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(M)$, $\text{supp}(\phi) \subset \Omega$. E' allora chiaro che $WF(u) \cap T_{\partial M}^*M = \emptyset$ e quindi che $WF(u) = WF(u|_M^0)$.

Questa osservazione (e altre!) hanno condotto Melrose e Sjöstrand (attorno al 1978 ~) a domandarsi se non fosse possibile caratterizzare il fatto che una $u \in \mathcal{D}'(M)$ è C^∞ al bordo ∂M in termini microlocali. Ebbene una tale caratterizzazione esiste, almeno per un certo sottospazio non banale di $\mathcal{D}'(M)$.

Per definire precisamente le cose, cominciamo col metterci nel caso locale $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_y^n \mid x \geq 0\}$. Sia $u \in \mathcal{D}'(M)$; diremo che u ha traccia in un punto $y_0 \in \partial M$ se esistono $y_0 \in U \subset \partial M$, U aperto, $T > 0$ ed $f \in C^\infty([0, T[; \mathcal{D}'(U))$ tali che:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \forall \phi \in C_0^\infty([0, T[\times U): \\ \langle u, \phi \rangle = \int_0^T \langle f(x), \phi(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'_y, \mathcal{D}'_y} dx \end{cases}$$

Un insieme $[0, T[\times U$, $U \ni y_0$, lo diremo una scatola attorno a $(0, y_0)$.

E' chiaro che f è univocamente determinata. Di più, per ogni $j = 0, 1, \dots$, $\partial_x^j f|_{x=0}$ è ben definita come distribuzione in U , e si dirà la j -ma traccia di u .

Passando al caso globale daremo la definizione seguente.

Si dirà che $u \in \mathcal{D}'(M)$ è normalmente regolare in $z_0 \in \partial M$ se per ogni parametrizzazione $h: V \xrightarrow{\sim} \begin{matrix} U \\ \Psi \\ z_0 \\ \mathbb{R}_+^{n+1} \end{matrix} \subset M$, $V \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, U e V aperti, il pull-back $h_*(u)$ ha traccia in $h^{-1}(z_0) \in \partial V$.

Indicheremo con $\mathcal{D}'_0(M) \subset \mathcal{D}'(M)$ il sottospazio delle distri-

buzioni (prolungabili) normalmente regolari in ogni punto di ∂M .

E' chiaro che se $u \in \mathcal{D}'(M)$ è C^∞ al bordo allora $u \in \mathcal{D}'_0(M)$, ma non è affatto ovvio (neppure nel caso $M = \mathbb{R}_+^{n+1}$!) che $\mathcal{D}'_0(M)$ possa contenere distribuzioni che non sono C^∞ al bordo.

Uno dei motivi, di interesse per $\mathcal{D}'_0(M)$ sta nel seguente risultato:

Teorema 1.1. (Hörmander [3]). Sia P un operatore differenziale (lineare e d'ordine finito) a coefficienti C^∞ su M . Siano $u, f \in \mathcal{D}'(M)$ con $Pu = f$ in M , e sia $z_0 \in \partial M$.

Se:

- i) P è non caratteristico in z_0 (i.e., detto $p(z, \zeta)$ il simbolo principale di P , $p|_{N^*_{z_0} \setminus 0} \neq 0$)
 - ii) f è normalmente regolare in z_0 ,
- allora u è normalmente regolare in z_0 .

Per la dimostrazione rimandiamo a L. Hörmander ([3], Teorema 4.3.1.). Segue, in particolare, dal T. 1.1 che se P è non caratteristico su ∂M (i.e. $p|_{N^*_{\partial M} \setminus 0} \neq 0$) ed $f \in C^\infty(M)$ allora $u \in \mathcal{D}'_0(M)$ (è ovvio che, in generale, u non sarà C^∞ al bordo!).

Vediamo ora come si microlocalizza la nozione di " C^∞ al bordo" per elementi di $\mathcal{D}'_0(M)$.

Ancora una volta consideriamo il caso locale $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \geq 0\}$. Sia $(y_0, \eta_0) \in T^*\partial M \setminus 0$ e sia $[0, T[\times U$ una scatola attorno $(0, y_0)$ su cui, $u \in C^\infty([0, T[; \mathcal{D}'(U))$. Diremo che u è C^∞ in (y_0, η_0) se esistono una scatola più piccola $[0, \varepsilon[\times V$ (sempre attorno a $(0, y_0)$), un intorno conico Γ di η_0 in $\mathbb{R}^n \setminus 0$, ed una $\phi \in C^\infty(V)$, $\phi(y_0) \neq 0$, tali che per ogni $j, N = 0, 1, \dots$ si abbia:

$$(1.7) \quad \sup_{\substack{0 \leq x < \varepsilon \\ \eta \in \Gamma}} (1 + |\eta|)^N \left| \partial_x^j \langle u(x, y), \phi(y) e^{-iy \cdot \eta} \rangle \right| < +\infty .$$

Per una $u \in \mathcal{D}'_0(M)$ definiremo poi:

$$(1.8) \quad WF_b(u) = WF(u|_M^\circ) \cup \{(y, \eta) \in T^*\partial M \setminus 0 \mid u \text{ non è } C^\infty \text{ in } (y, \eta)\}$$

Sicché $WF_b(u) \subset T^*\overset{\circ}{M} \setminus 0 \cup T^*\partial M \setminus 0$.

Vediamo un po' di analizzare la definizione (1.7) ora introdotta.

Teorema 1.2. Si hanno le proprietà (siamo sempre nel caso locale!):

- i) $WF_b(u)|_{\partial M} = \emptyset \Leftrightarrow u \text{ è } C^\infty \text{ al bordo.}$
- ii) $(y_0, \eta_0) \in (T^*\partial M \setminus 0) \setminus WF_b(u) \Rightarrow$ che esiste una scatola $[0, T[\times U$ attorno a $(0, y_0)$ ed un intorno conico Γ di η_0 in $R^n \setminus 0$ per cui $WF(u) \cap \{(x, y, \xi, \eta) \mid (x, y) \in U, \eta \in \Gamma, \xi \in R\} = \emptyset$.
- iii) $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u) \Rightarrow \forall j \geq 0, (y_0, \eta_0) \notin WF(\partial_x^j u|_{x=0})$.
- iv) $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u) \Leftrightarrow$ esiste un operatore pseudo-differenziale (classico e proprio) $A(y, D_y) \in OPS^\circ(R^n)$, ellittico in (y_0, η_0) tale che Au è C^∞ al bordo vicino ad y_0 .

Prova. La iii) è ovvia. Proviamo i). Sia $u \in C^\infty([0, T] \times U)$ per una scatola $[0, T] \times U \ni (0, y_0)$. Allora;

$$\partial_x^j \langle u(x, y), \phi(y) e^{-i y \cdot \eta} \rangle = \int \partial_x^j u(x, y) \phi(y) e^{-i y \cdot \eta} dy$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{0 \leq x \leq T \\ \eta \in R^n}} (1 + |\eta|^2)^N \left| \int \partial_x^j u(x, y) \phi(y) e^{-i y \cdot \eta} dy \right| \\ & \leq \sup_{0 \leq x \leq T} \left| \int (1 - \Delta_y)^N \partial_x^j [u(x, y) \phi(y)] dy \right| < +\infty. \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che $(y_0, \eta) \notin WF(u)$ quale che sia $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$. E' facile vedere che esiste una scatola $[0, \varepsilon[\times V$ attorno a $(0, y_0)$ per cui, per ogni $\phi \in C_0^\infty(V)$ e per ogni $j, N = 0, 1, \dots$, si ha:

$$\sup_{\substack{0 \leq x < \varepsilon \\ \eta \in \mathbb{R}^n}} (1+|\eta|)^N |\partial_x^j \langle u(x, y), \phi(y) e^{-iy \cdot \eta} \rangle| < +\infty$$

Di qui segue che $\partial_x^j u|_{x=0} \in C^\infty(V)$, $j = 0, 1, \dots$. Usando il lemma di Borel costruiamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times V)$ con $\partial_x^j f|_{x=0} = \partial_x^j u|_{x=0}$, $\forall j$. Definiamo poi $v(x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times V)$ ponendo $v = u$ per $x \geq 0$ e $v = f$ per $x < 0$. Ne segue che $\langle v(x, y), \phi(y) \rangle \in C^\infty(\mathbb{R} \times V)$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(V)$. Inoltre, ragionando come nella prima parte,

$$\sup_{\substack{|x| < \varepsilon \\ \eta \in \mathbb{R}^n}} (1+|\eta|)^N |\partial_x^j \langle v(x, y), \phi(y) e^{-iy \cdot \eta} \rangle| > +\infty, \quad \forall j, N.$$

Preso $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times V)$, $\psi(x, y) = \alpha(x)\phi(y)$, si ha:

$$\begin{aligned} & (1+\xi^2+|\eta|^2)^N | \langle v(x, y), e^{-i(x\xi+y \cdot \eta)} \alpha(x)\phi(y) \rangle | = \\ & = (1+\xi^2+|\eta|^2)^N \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle v(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle e^{-ix\xi} \alpha(x) dx \right| \\ & \leq (1+|\eta|^2)^N \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle v(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle (1-\partial_x^2)^N (e^{-ix\xi}) \alpha(x) dx \right| \\ & = (1+|\eta|^2)^N \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-\partial_x^2)^N [\alpha(x) \langle v(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle] e^{-ix\xi} dx \right| \\ & \leq C_N \sup_{\substack{|x| \leq \varepsilon \\ j \leq 2N \\ \eta \in \mathbb{R}^n}} (1+|\eta|^2)^N |\partial_x^j \langle v(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle| < +\infty. \end{aligned}$$

Dunque $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \varepsilon, \varepsilon[\times V)$, sicché $u \in C^\infty([0, \varepsilon[\times V)$ e quindi la tesi. La i) è dimostrata.

Veniamo a ii). Supponiamo che in una scatola $[0, T[\times V$, attorno a $(0, y_0)$ si abbia, per $\phi \in C_0^\infty(V)$ $\sup_{0 \leq x < T} (1+|\eta|)^N |\partial_x^j \langle u(x, y), \phi(y) \rangle| e^{-iy \cdot \eta}$.

$<+\infty$ quali che siano N e $j \geq 0$, con Γ intorno canonico di η_0 . Il prolungamento \tilde{u} di u dà sulle funzioni test $\psi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n - T, T[\times V)$ del tipo $\psi(x, y) = \alpha(x)\phi(y)$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, e^{-i(x\xi+y \cdot \eta)} \alpha(x)\phi(y) \rangle &= \\ &= \int_0^T \langle u(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle \alpha(x) e^{-ix\xi} dx. \end{aligned}$$

Preso $\eta \in \Gamma$ e $\xi \in \mathbb{R}$, integrando per parti è facile vedere che $(1+\xi^2+|\eta|^2)^N \langle \tilde{u}, e^{-i(x\xi+y \cdot \eta)} \alpha(x)\phi(y) \rangle$ è una combinazione lineare finita di termini del tipo:

$$(1+|\eta|^2)^r \xi^h \partial_x^k \langle u(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle|_{x=0}$$

e

$$(1+|\eta|^2)^s \int_0^T \chi(x) \partial_x^l \langle u(x, y), e^{-iy \cdot \eta} \phi(y) \rangle e^{-ix\xi} dx,$$

dove $r, s \leq N$, $h, k, l \leq 2N$ e le χ sono opportune funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n - T, T[)$. Per ogni $c > 0$ si ponga $\Lambda_c = \{(\xi, \eta) | \eta \in \Gamma, |\xi| \leq c|\eta|\}$. Allora, dall'ipotesi si ha:

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \Lambda_c} (1+\xi^2+|\eta|^2)^N |\langle \tilde{u}, e^{-i(x\xi+y \cdot \eta)} \alpha(x)\phi(y) \rangle| < +\infty$$

e quindi, per l'arbitrarietà di c , $WF(\tilde{u}) \cap \{(x, y; \xi, \eta) | (x, y) \in]-T, T[\times V, \xi \in \mathbb{R}, \eta \in \Gamma\} = \emptyset$.

Dalla (1.4) segue allora la tesi.

N.B. i) non segue banalmente da ii) perché se anche possiamo prendere $\Gamma = \mathbb{R}^n \setminus 0$ si avrà sempre, in generale $N^* \partial M \setminus 0 \subset WF_b(u)$. Vediamo infine a iv). Non è difficile vedere che se $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u)$, allora $A(y, D_y)u \in C^\infty$ fino al bordo in y_0 per operatori $A(y, D_y) = \phi(y)\chi(D_y)$ con $\phi \in C_0^\infty$ in un intorno opportuno di y_0 e $\chi \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^n)$, con supporto conico in un intorno conico opportuno di η_0 e che, viceversa se $\phi(y)\chi(D_y)u \in C^\infty$ fino al bordo in y_0 allora $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u)$. D'altra parte ogni $A(y, D_y)$ si può scrivere nella forma $A = B\phi(y)\chi(D_y) + R$ con $B \in OPS^0(\mathbb{R}^n)$ ed $R \in OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ e di qui la tesi.

Attenzione. Dalla definizione di WF_b segue che per $u \in \mathcal{D}'(M)$ si ha:

$$(1.9) \quad WF(u|_M^0) \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} WF(\partial_x^j u|_{x=0}) \subset WF_b(u).$$

Occorre guardarsi dal credere che (1.9) sia un'uguaglianza. A tale proposito è illuminante il controesempio seguente.

Si prenda in $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$, $F(x,y) = \exp i(y - \frac{1}{x})^2$ e, se $M = \{(x,y) | x \geq 0\}$, si ponga:

$$(1.10) \quad \langle u, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y-1/x)^2} \phi(x,y) dy dx.$$

E' chiaro che $u \in \mathcal{D}'(M)$. Anzi $u \in C^\infty([0, +\infty[; \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$; infatti se $\psi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y-1/x)^2} \phi(y) dy &= e^{\frac{i}{x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i \frac{y}{x}} e^{iy^2} \phi(y) dy = \\ &= e^{i/x^2} F_{y \rightarrow 2/x} [e^{iy^2} \phi(y)] \in C^\infty([0, +\infty[) \end{aligned}$$

ed ha traccia nulla per $x = 0$. Analogo ragionamento si fa per le derivate (si noti che $\partial_x F = 1/x^2 \partial_y F$). Dunque $WF(u|_M^\circ) = \emptyset$, $\bigcup_{j=0}^{\infty} WF(\partial_x^j u|_{x \neq 0}) = \emptyset$, ma è chiaro che $WF_b(u) \neq \emptyset$ perché u non è C^∞ fino al bordo.

Notiamo poi che $WF_b(u)$ è un chiuso conico di $T^*\partial M \setminus 0 \cup T^*M \setminus 0$ quando quest'ultimo insieme ha la topologia naturale. In effetti se $(x_\nu, y_\nu; \xi_\nu, \eta_\nu) \in WF_b(u) \cap T^*M \setminus 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, e se $x_\nu \rightarrow 0$, $y_\nu \rightarrow y_0$, $\xi_\nu \rightarrow 0$, $\eta_\nu \rightarrow \eta_0 \neq 0$ e se fosse $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u)$ allora dal T. 1.2. ii) avremmo una contraddizione.

Veniamo ora alla definizione di $WF_b(u)$ con $u \in \mathcal{D}'(M)$ ed M qualunque.

Naturalmente l'idea è di definirlo mediante carte locali, cioè dire che $(z_0, \zeta_0) \in T^*\partial M \setminus 0$ non sta in $WF_b(u)$ se presa una parametrizzazione $h : [0, T] \times V \xrightarrow{\sim} U \subset M$ si ha $h_0^*(z_0, \zeta_0) \notin WF_b(h_*(u))$ (per ipotesi u è normalmente regolare e $h_0 = h|_{\{0\} \times V} : \partial([0, T] \times V) \xrightarrow{\sim} U \cap \partial M$).

Non è a priori ovvio che la definizione ora data non dipende da h . In almeno un caso (interessante!) è vero come conseguenza del seguente

Teorema 1.3. (Melrose-Sjöstrand [7]). Sia P un operatore differenziale (d'ordine finito, a coefficienti C^∞) su M tale che ∂M non sia caratteristica per P . Sia $u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu = f \in C^\infty(M)$ e si supponga che un punto $(z_0, \zeta_0) \in T^*\partial M \setminus 0$ non stia in $WF_b(h_*(u))$ per una qualche parametrizzazione h di M vicino a z_0 . Allora (z_0, ζ_0) (o meglio, la sua immagine) non sta in $WF_b(k_*(u))$ per ogni altra parametrizzazione k di M vicino a z_0 .

Prova. Supponiamo di guardare tutto in una certa parametrizzazione e scriviamo u nel nuovo sistema di coordinate, $u \in C^\infty([0, T] \times V)$

con $Pu = f \in C^\infty([0, T[\times V)$ (si può supporre, senza minore generalità, $P = \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha j}(x, y) D_x^j D_y^\alpha$ con $a_{\alpha j} \in C^\infty(]-T, T[\times V)$ e $a_{0m} \neq 0$ su $]-T, T[\times V)$).

Detto \tilde{u} il prolungamento di u con lo zero, per la formula di Green si ha (in $]-T, T[\times V)$:

$$(1.11) \quad P\tilde{u} = \tilde{f} + \sum_{j=0}^{m-1} u_j(y) \otimes \delta_x^{(j)},$$

dove \tilde{f} è il prolungamento di f con lo zero e le $u_j \in \mathcal{D}'(V)$ sono combinazioni lineari a coefficienti $C^\infty(V)$ di derivate rispetto a y delle tracce $\partial_x^j u|_{x=0}$, $j = 0, \dots, m-1$ (e $\delta_x^{(j)} = D_x^j \delta_x$).

Poiché $x = 0$ è non caratteristica per P , data la serie formale $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \partial_x^k f(0, x) x^k$ possiamo trovare $w \in C^\infty([0, T[\times V)$ tale che la serie di Taylor in x di Pw sia $= - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \partial_x^k f|_{x=0} x^k$, sicché $P(u+w) \in C^\infty([0, T[\times V)$ ed è piatta su $x = 0$. Dunque, a patto di aggiungere a u una funzione $C^\infty([0, T[\times V)$ (che non altererà $WF_b(u)$, nè $WF(\partial_x^j u|_{x=0})$, $\forall j!$), possiamo supporre $\tilde{f} \in C^\infty(]-T, T[\times V)$. Dall'ipotesi e dall'invarianza di $WF(\cdot)$ per campi di coordinate, seguirà che, per un certo intorno conico Λ di (y_0, η_0) in $T^*\partial([0, T[\times V) \setminus 0$, avremo $\Lambda \cap WF(u_j) = \emptyset$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Poiché P è non caratteristico per $x = 0$, segue dalla teoria degli O.P.D. che esiste un $Q \in OPS^{-m}(]-T, T[\times V)$, classico e proprio, tale che $QP = I - R$ con $R \in OPS^0(]-T, T[\times V)$ e con simbolo in $S^{-\infty}(\Gamma)$ per un intorno conico Γ di $N^*\partial([0, T[\times V) \setminus 0$.

Dunque, applicando Q in (1.10) si ha:

$$(1.12) \quad \tilde{u} = R\tilde{u} + Q\tilde{f} + \sum_{j=0}^{m-1} Q(u_j(y) \otimes \delta_x^{(j)})$$

Ora $Q\tilde{f} \in C^\infty(]-T, T[\times V)$. D'altra parte, per il Teorema 1.2, ii), possiamo supporre che $\{(x, y; \xi, \eta) \mid (y, \eta) \in \Lambda', \xi \in \mathbb{R}, 0 \leq x < T'\} \cap WF(R\tilde{u}|_{x \geq 0}) = \emptyset$, per un intorno conico Λ' di (y_0, η_0) , $\Lambda' \subset \Lambda$ e per un $T' \leq T$ conveniente. Poiché $WF(R\tilde{u}) \cap N^*\partial([0, T[\times V) = \emptyset$, ne consegue che per qualche $A(y, D_y)$

$\in OPS^0(V)$ con $WF(A) \subset \Lambda'$, possiamo dire che $A(\tilde{R}u|_{x \geq 0})$ è C^∞ fino al bordo in y_0 .

Quanto al termine $Q(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(y) \otimes \delta_x^{(j)})$ segue da un Teorema di Hörmander [4, Lemma 8.33] che se $A^{(0)}$ è come prima allora $AQ(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(y) \otimes \delta_x^{(j)})$ è C^∞ fino al bordo in y_0 . Il Teorema è così dimostrato.

In conclusione, poiché $WF(u|_M^0)$ è ovviamente invariante, ne segue che per $u \in \mathcal{D}'_0(M)$ con $Pu \in C^\infty(M)$, P non caratteristico su ∂M , si ha una nozione invariante di $WF_b(u) \subset T^*M \setminus 0 \cup T^*\partial M \setminus 0$. Nel seguito tratteremo frequentemente di sistemi. Se $u = (u_1, \dots, u_N)$ è un vettore distribuzione con $WF(u)$ (o $WF_b(u)$) si deve intendere $\bigcup_{j=1}^N WF(u_j)$ (risp. $\bigcup_{j=1}^N WF_b(u_j)$).

2. PROPAGAZIONE E RIFLESSIONE DELLE SINGOLARITA'

Cominciamo col considerare su $M = \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n$ un sistema del tipo

$$(2.1) \quad P = I_N D_x - A(x, y, D_y)$$

dove A è una matrice $N \times N$ di operatori pseudo-differenziali classici e propri del 1° ordine, dipendenti in modo C^∞ dal parametro $x \geq 0$; scriviamo $A(x) \in OPS^1(M; N \times N)$. Se $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{D}'_0(M)^N$, l'azione di P su u è ben definita e $Pu \in \mathcal{D}'_0(M)^N$.

Si osservi che il caso in cui A è P.D. è effettivamente interessante.

Esempio. Sia $L = \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha j}(x, y) D_x^j D_y^\alpha$ con $a_{\alpha j} \in C^\infty$ e $a_{0m}(x, y) \neq 0$. Sia $\Lambda \in OPS^1(\mathbb{R}_y^n)$ classico e proprio con simbolo principale $|\eta|$ (ad es. $= \sqrt{1 - \Delta_y}$). Se $Pu = f$, poniamo:

$$u_1 = \Lambda^{m-1} u, \quad u_2 = D_x \Lambda^{m-2} u, \dots, u_{m-1} = D_x^{m-2} \Lambda u,$$

$$u_m = D_x^{m-1} u.$$

Allora:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_x u_1 = \Lambda u_2 \\ D_x u_2 = \Lambda u_3 \\ \dots \\ D_x u_{m-1} = \Lambda u_m \\ D_x u_m = D_x^m u = f/a_{om} - \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ j < m}} \frac{a_{\alpha j}(x,y)}{a_{om}(x,y)} D_y^\alpha \Lambda^{-m+j+1} D_x^j \Lambda^{m-j-1} u \\ = f/a_{om} - \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ j < m}} \frac{a_{\alpha j}(x,y)}{a_{om}(x,y)} D_y^\alpha \Lambda^{-m+j+1} u_{j+1} = \\ = f/a_{om} + \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x,y,D_y) u_{j+1} \end{array} \right.$$

$$\text{ove } B_j = - \sum_{|\alpha| \leq m-j} \frac{a_{\alpha j}(x,y)}{a_{om}(x,y)} D_y^\alpha \Lambda^{-m+j+1} \in OPS^1(M).$$

Allora $Pu = f$ equivale (almeno formalmente per il momento):

$$(2.3) \quad D_x \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

con $g = f/a_{om}$.

Se $A(x,y,D_y) \in OPS^1(M; mxm)$ è la matrice a destra, si noti che

$$(2.4) \quad \sigma_1(A)(x,y,\eta) = \begin{pmatrix} 0 & |\eta| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\eta| & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1(B_0)(y,\eta) & \sigma_1(B_1)(y,\eta) & \dots & \sigma_1(B_{m-1})(y,\eta) \end{pmatrix}.$$

E' facile riconoscere che le radici del polinomio caratteristico

$$(2.4)' \quad \det(\lambda I_N - \sigma_1(A)(x,y,\eta)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0,$$

sono tutte e sole le radici del polinomio.

$$(2.4)'' \quad \lambda^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j=m \\ j < m}} \frac{a_{\alpha j}^{(x,y)}}{a_{0m}(x,y)} \eta^\alpha \lambda^j = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

N.B. La riduzione dell'equazione $Pu = f$ al sistema $(I_N D_x - A(x,y,D_y))u = g$ è notevolmente diversa da quella classica (cfr. Taylor [9]).

Enunciamo ora un teorema importante la cui dimostrazione non può essere riportata qui:

Teorema 2.1. Si consideri $u \in \mathcal{D}'_0(M)^N$ (i.e. $u = (u_1, \dots, u_N)$) tale che $Pu = D_x u - A(x,y,D_y)u = f$ in $M = \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n$.
Sia $(y_0, \eta_0) \in T^*0M \setminus 0$. Allora:

(Caso Iperbolico)

a) Sia $\sigma_1(A)(x,y,\eta)$, $x \geq 0$, $\eta \neq 0$, reale e supponiamo che il polinomio $\mathbb{C} \ni \lambda \rightarrow \det(\lambda I_N - \sigma_1(A)(0,y_0,\eta_0))$ abbia N radici reali e distinte.

Se:

i) $(y_0, \eta_0) \notin \text{WF}(u|_{x=0})$

ii) $(y_0, \eta_0) \notin \text{WF}_b(f)$,

allora $(y_0, \eta_0) \notin \text{WF}_b(u)$.

(Caso Ellittico)

- b) Se il polinomio $C \ni \lambda \rightarrow \det (\lambda I_N - \sigma_1(A)(0, y_0, \eta_0))$ ha N radici con $\text{Im } \lambda > 0$ e se valgono i) ed ii) allora si ha la stessa conclusione $(y_0, \eta_0) \notin \text{WF}_b(u)$.

Per una dimostrazione del T. 2.1. si veda ad esempio M. Taylor [8, 9] o J. Chazarain [1] (e referenze indicate in questi lavori).

Facciamo alcune osservazioni. Nel caso a) è subito visto che per (y, η) , in un intorno conico Γ di (y_0, η_0) e per $x \in [0, T[$, $T > 0$ conveniente, il polinomio $\lambda \rightarrow \det (\lambda I_N - \sigma_1(A)(x, y, \eta))$ ha esattamente m radici reali e distinte, $\lambda_1(x, y, \eta), \dots, \lambda_m(x, y, \eta)$. Chiameremo bicaratteristica associata a $\lambda_j(x, y, \eta)$, uscante da (y_0, η_0) e penetrante in M , la curva:

$$[0, \varepsilon) \ni s \rightarrow \gamma_j^s(s, y(s; y_0, \eta_0), \xi(s; y_0, \eta_0), \eta(s; y_0, \eta_0))$$

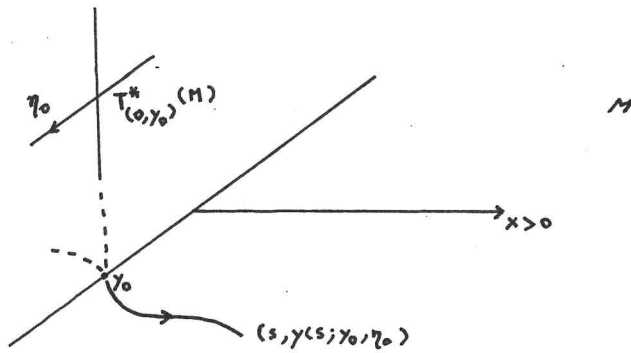
tale che:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} y(s) = -d_{\eta} \lambda_j(s, y(s), \eta(s)), & y(0) = y_0 \\ \frac{d}{ds} \eta(s) = d_y \lambda_j(s, y(s), \eta(s)), & \eta(0) = \eta_0 \\ \frac{d}{ds} \xi(s) = (\partial_x \lambda_j)(s, y(s), \eta(s)), & \xi(0) = \lambda_j(0, y_0, \eta_0). \end{cases}$$

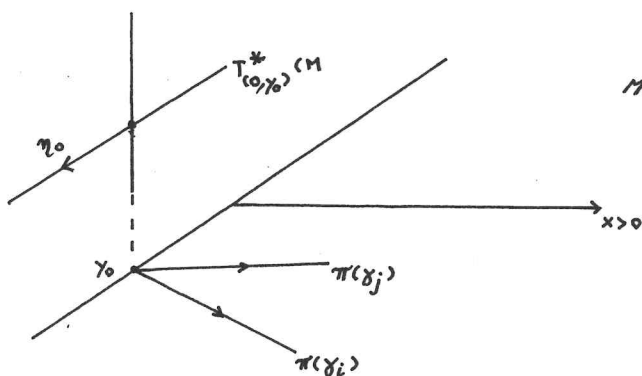
Si noti che $\frac{d}{ds} (\xi(s) - \lambda_j(s, y(s), \eta(s))) = \partial_x \lambda_j - \partial_x \lambda_j - d_y \lambda_j \cdot \dot{y}(s) - d_{\eta} \lambda_j \cdot \dot{\eta}(s) = 0$ sicché

$$\xi(s) - \lambda_j(s, y(s), \eta(s)) = \xi(0) - \lambda_j(0, y_0, \eta_0) = 0, \text{ i.e.}$$

$$\xi(s) = \lambda_j(s, y(s), \eta(s)), \forall s \in [0, \varepsilon).$$



La proiezione su M di $\gamma_j, \pi(\gamma_j)$, si dirà la caratteristica (penetrante in M , con punto iniziale (y_0, η_0)). Si noti che $\pi(\gamma_j(s)) = (s, y(s; y_0, \eta_0))$ e quindi la curva $s \rightarrow \pi(\gamma_j(s))$ interseca $x = 0$ trasversalmente. Si noti che per $i \neq j$, γ_i e γ_j sono distinte in $T^*M \setminus 0$, ma che $\pi(\gamma_i)$ e $\pi(\gamma_j)$ possono anche coincidere.



Come conseguenza del Teorema 2.1 a) si ha quindi che $\gamma_j \cap WF(u|_M^0) = \emptyset, \forall_j$, almeno per s piccolo, nell'ipotesi che $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u) \cup WF_b(f)$.

Il caso b) nel T. 2.1. si riferisce ad una situazione in cui è ben posto (almeno microlocalmente) in M il problema di Dirichlet $Pu=f$, $u|_{x=0} = \text{dato}$, perché tutte le radici del polinomio caratteristico sono a $\text{Im} > 0$ (N.B. $D_x = \frac{1}{i} \partial_x$).

Veniamo ora al risultato principale di questo seminario.

Supporremo assegnato il sistema 2.1. nell'ipotesi:

H_1) $\sigma_1(A)(x, y, \eta)$, $\eta \neq 0$, è reale.

Sia poi $(y_0, \eta_0) \in T^*\partial M \setminus 0$; supponiamo:

H_2) il polinomio $C \ni \lambda \longrightarrow \det(\lambda I_N - \sigma_1(A)(0, y_0, \eta_0))$ ha $k \leq N$ e solo k radici reali distinte $\lambda_1(y_0, \eta_0), \dots, \lambda_k(y_0, \eta_0)$.

Consideriamo il problema al contorno

$$(2.6) \quad \begin{cases} Pu = I_N D_x u - A(x, y, D_y)u = f & , \text{ in } M \\ B(u|_{x=0}) = g & , \text{ in } \partial M \end{cases}$$

dove $B \in OPS^0(\partial M; 1 \times N)$ ($1 \leq i \leq N$).

Per ipotesi $C^N = E_k \oplus C_+^v \oplus C_-^v$ dove E_k è il sottospazio generato dagli autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di $\lambda I_N - \sigma_1(A)(0, y_0, \eta_0)$. Ovviamente $\dim E_k = k \leq N$. Se $k < N$, il polinomio $\lambda \rightarrow \det(\lambda I_N - \sigma_1(A)(0, y_0, \eta_0))$ ha v radici $\text{Im} \lambda > 0$ e v radici con $\text{Im} \lambda < 0$ e $2v+k = N$ e C_+^v (resp. C_-^v) è l'autospazio degli autovettori generalizzati corrispondenti. Non escludiamo a priori che possa essere $k = 0$ (e quindi $N = 2v$) o $k=N$ (e quindi $v=0$).

Sia $J' \subset \{1, 2, \dots, k\}$ e J'' il complementare di J' . In corrispondenza avremo la decomposizione $E_k = E_{J'} \oplus E_{J''}$. Indichiamo con π', π'' , π_+, π_- i proiettori di C^N su $E_{J'}, E_{J''}, C_+^v, C_-^v$ rispettivamente.

Possiamo enunciare il seguente:

Teorema 2.2. Valgono $H_1), H_2)$ e siano, in (2,6), $u, f \in \mathcal{D}'_0(M)^N$, $g \in \mathcal{D}'(\partial M)^1$. Supposto che:

$$1^\circ) (y_0, \eta_0) \notin WF_b(f) \cup WF(g).$$

$$2^\circ) \forall j \in J' \quad WF(u|_M^0) \cap \gamma_j(y_0, \eta_0) = \emptyset.$$

3° l'applicazione lineare

$$\ker \pi' \oplus \ker \pi \ni z \rightarrow \sigma_0(B)(y_0, \eta_0)z \in \mathbb{C}^1$$

è iniettiva (si dice che B è perfettamente riflettente rispetto ai raggi $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_0}$).

Allora $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(u)$ e, in particolare, $WF(u|_M^0) \cap \gamma_j(y_0, \eta_0) = \emptyset$ per $j = 1, \dots, k$.

Prova (abbozzata, per maggiori dettagli si veda Taylor [8]).

Cominciamo coll'osservare che senza minore generalità si può supporre $A(x, y, D_y)$ definito per $x \in \mathbb{R}$. Poiché $\sigma_1(A)(x, y, \eta)$ è reale e gli autovalori $\lambda_1(y_0, \eta_0), \dots, \lambda_N(y_0, \eta_0)$ sono semplici, esisterà un intorno conico Γ di (y_0, η_0) in $T^*\partial M \setminus 0$ ed un $T > 0$ per cui, per $(x, y, \eta) \in]-T, T[\times \Gamma$ il polinomio $\lambda \rightarrow \det(\lambda I_N - \sigma_1(A)(x, y, \eta))$ ha esattamente k radici semplici reali $\lambda_j(x, y, \eta) \in C^\infty(]-T, T[\times \Gamma)$, $j = 1, \dots, k$, e $(N-k)/2 = \nu$ radici λ_i^+ con $\text{Im } \lambda_i^+ > 0$ ($e(N-k)/2 = \nu$ radici λ_i^- con $\text{Im } \lambda_i^- < 0$).

Senza minore generalità sia $J' = \{1, \dots, k_0\}$, $J'' = \{k_0+1, \dots, k\}$. È facile vedere che esiste una matrice complessa $N \times N$, $\mathcal{U}(x, y, \eta)$ a termini C^∞ in $(x, y, \eta) \in]-T, T[\times \Gamma$, omogenei di grado 0 in η , invertibile per cui:

$$(2.7) \quad \mathcal{U}_{\sigma_1}(A)U^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k_0} & & \square \\ & & & \lambda_{k_0+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & \\ & & & & & & E_+ \\ & & \square & & & & E_- \end{array} \right] = \tilde{a}(x, y, \eta),$$

con E_+ , (risp. E_-) matrice $\nu \times \nu$ (a termini C^∞ omogenei di grado 1 in η) con autovalori λ con $\text{Im } \lambda > 0$ (risp. $\text{Im } \lambda < 0$).

Prolunghiamo \tilde{a} su $] -T, T[\times T^*\partial M \setminus 0$ in modo da conservare la struttura (2.7) (con i λ_j distinti) e coincidente con (2.7) su $] -T, T[\times \Gamma'$, $(y_0, \eta_0) \in \Gamma' \subset \Gamma$. Sia $\psi(y, \eta) \in S^\circ(T^*\partial M \setminus 0)$ con supporto conico in Γ' e $\psi \sim 1$ su un intorno conico di (y_0, η_0) .

Poniamo $v = U(x, y, D_y)\psi(y, D_y)u$. Allora:

$$(2.8) \quad \begin{cases} D_x v = \tilde{A}(x, y, D_y)v + F \\ U(o, y, D_y)B + U(o, y, D_y)^{-1} v|_{x=0} = \tilde{B} \quad v|_{x=0} = G, \end{cases}$$

dove:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \tilde{A} = U A U^{-1} + (D_x U) V^{-1}, & F = U \psi f + [U, \psi] A u \\ G = U(o) \psi g + U(o) [B, \psi] u(o). \end{cases}$$

Si noti che $\sigma_1(\tilde{A})(x, y, \eta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k & E_+ \\ 0 & & & & E_- \end{pmatrix}$ su $] -T, T[\times \Gamma'$.

Inoltre se $(y_0, \eta_0) \notin WF(g) \cup WF_b(f)$, ne segue che $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(F) \cup WF(G)$ (come conseguenza del T. 1.2.).

Notiamo subito qual'è la struttura dei proiettori π' , π'' , π_+ , π_- .
Si ha:

$$U \sigma_1(A) U^{-1} = E' + E'' + E_+ + E_-$$

dove

$$E' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{k_0} & & \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad E'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & \lambda_{k_0+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ & & & & \lambda_{k'} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ ecc.}$$

È immediato allora che:

$$\pi' = U^{-1} \begin{pmatrix} I_{k_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} U, \quad \pi'' = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{k-k_0} \\ & & 0 \end{pmatrix} U,$$

$$\pi_+ = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{k'} \\ & & 0 \end{pmatrix} U, \quad \pi_- = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{k'} \end{pmatrix} U,$$

mentre per il nuovo sistema (2.8) $\tilde{\pi}' = I_{k_0}$, $\tilde{\pi}'' = I_{k-k_0}$, $\tilde{\pi}_+ = I_{k'}$, $\tilde{\pi}_- = I_{k'}$
e $\sigma_0(\tilde{B}) = U \sigma_0(B) U^{-1}$, sicché l'iniettività di $\sigma_0(B)(y_0, \eta_0)$ ristretta a $\ker \pi' \oplus \ker \pi_-$ è la stessa cosa dell'iniettività di $\sigma_0(\tilde{B})(y_0, \eta_0)$ ristretta ai vettori $\zeta \in \mathbb{C}^N$ del tipo

$$(2.10) \quad \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta'' \\ \zeta_+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta'' \in \mathbb{C}^{k-k_0}, \quad \zeta_+ \in \mathbb{C}^v,$$

i.e. $\sigma_0(\tilde{B})(y_0, \eta_0)$ o $(\tilde{\pi}'' + \tilde{\pi}_+)$: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^1$ è iniettiva (N.B. ciò è possibile solo se $(k-k_0) + v \leq 1$).

Il sistema (2.8) $D_x v - \tilde{A} v = F$, $\tilde{B} v|_{x=0} = G$ è decomposto a livello del simbolo principale. Usiamo ora un metodo di Taylor [8] per disaccoppiare del tutto le equazioni.

Precisamente è possibile trovare $K(x, y, D_y) \in OPS^{-1}(\cdot, T, T[x \partial M; N \times N])$ (proprio) tale che, posto $w = (I+K)v$ si ha:

$$(2.11) \quad D_x w = \tilde{A}(x, y, D_y)w + R(x, y, D_y)w + \tilde{F},$$

con $R(x, y, D_y) \in OPS^{-\infty}(\cdot, T, T[x \partial M; N \times N])$

e:

$$(2.12) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}' & & & \square \\ & \mathcal{L}'' & & \\ & & \mathcal{L}_+ & \\ \square & & & \mathcal{L}_- \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}' \in OPS^1(\cdot, T, T[x \partial M; k_0 \times k_0]) \quad \sigma_1(\mathcal{L}')(x, y, \eta) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y, \eta) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_{k_0}(x, y, \eta) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}'' \in OPS^1(\cdot, T, T[x \partial M; (k-k_0) \times (k-k_0)]), \quad \sigma_1(\mathcal{L}'')(x, y, \eta) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_{k_0+1}(x, y, \eta) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_k(x, y, \eta) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_{\pm} \in OPS^1(\cdot, T, T[x \partial M; v \times v])$$

$$\text{e } \sigma_1(\mathcal{L}_{\pm})(x, y, \eta) = \mathcal{E}_{\pm}(x, y, \eta).$$

D'altra parte, $\tilde{F} \in \mathcal{D}'_0([0, T[\times \partial M)^N$ con $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(\tilde{F})$.

Inoltre $\tilde{B}(I+K)^{-1} w|_{x=0} = \tilde{B} w|_{x=0} = \tilde{G}$, $(y_0, \eta_0) \notin WF(\tilde{G})$.

Si noti che il simbolo principale di \tilde{B} , $\sigma_0(\tilde{B})(y, \eta) = \sigma_0(\tilde{B})(y, \eta)$.

Poiché $w \in C^\infty([0, T[; \mathcal{D}'(\partial M))$ ne segue che $R w$ è C^∞ fino al bordo. Dunque,

posto $w = \begin{bmatrix} w' \\ w'' \\ w+ \\ w- \end{bmatrix}$ avremo

$$D_x w' = \mathcal{L}' w' + \phi', \quad (y_0, \eta_0) \notin WF_b(\phi').$$

Per ipotesi $WF(w'|_M) \cap \gamma_j(y_0, \eta_0) = \emptyset$ per $j = 1, \dots, k_0$ e quindi, da risultati classici: $(y_0, \eta_0) \notin WF(w'|_{x=0})$. Dunque per il T.2.1., $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(w')$.

D'altra parte $D_x w- = \mathcal{L}- w- + \phi-$, $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(\phi-)$.

Poiché $\sigma_+(\mathcal{L}-)(x, y, \eta)$ ha autovalori con $\text{Im} < 0$, sicché dal T. 2.1., caso ellittico, ma applicato ad un semispazio $x \leq x_0 < T$, $x_0 > 0$, ne segue che $(y_0, \eta_0) \notin WF_b(w-|_{x=0})$.

Ora, per ipotesi

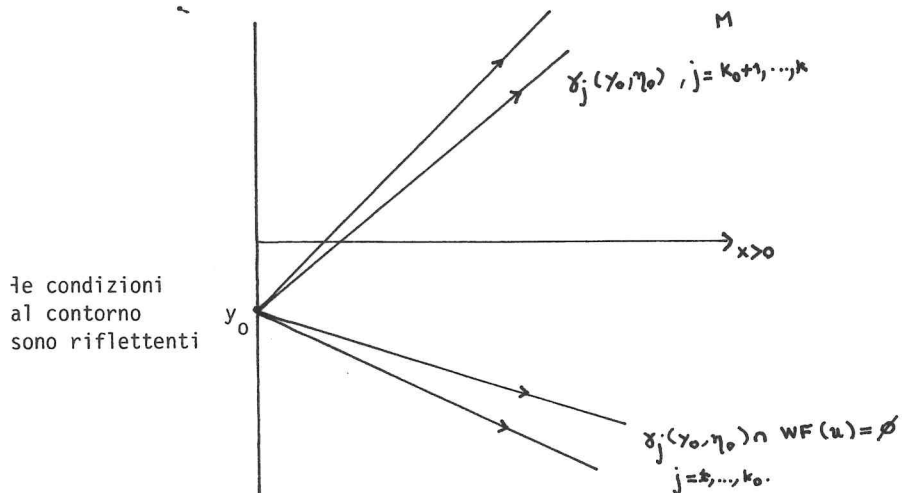
$$\tilde{B}_0(y, D_y) \circ \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & I_{k-k_0} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & I_\nu \end{bmatrix} = \tilde{B}_0(y, D_y) \circ J$$

ha simbolo principale iniettivo e quindi $\tilde{B}_0 \circ J$ è microipoellittico in (y_0, η_0) , i.e. $(y_0, \eta_0) \notin WF(w''(0)) \cup WF(w+(0))$ (giacché $(y_0, \eta_0) \notin WF(\tilde{G})$). Da qui si trae che:

$$\begin{cases} D_x w'' = \mathcal{L}'' w'' + \phi'' & , \quad (y_0, \eta_0) \notin WF_b(\phi'') \\ (y_0, \eta_0) \notin WF(w''|_{x=0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_x w_+ = \mathcal{L}_+ w_+ + \phi_+ , & (y_0, \eta_0) \in WF_b(\phi_+) \\ (y_0, \eta_0) \in WF(w_+|_{x=0}). \end{cases}$$

Dunque, dal T. 2.1., si trae che $(y_0, \eta_0) \in WF_b(w_+) \cup WF_b(w'')$ e quindi, in conclusione $(y_0, \eta_0) \in WF_b(w)$; poiché $w = (I + \mathbb{K}) \mathcal{U} \psi(y, D_y)u$, se ne trae, usando il T. 2.1., che $(y_0, \eta_0) \in WF_b(u)$.



Alcune osservazioni:

- 1 - Se $k_0 = 0$ non c'è 2° nell'ipotesi, ma c'è solo l'iniettività di $\sigma_0(B)(y_0, \eta_0) : \ker \pi_- \subset \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^1$ (vera se, ad es. $B = \text{id}$.)
- 2 - Se $k_0 = k$, allora c'è l'iniettività di $\sigma_0(B)(y_0, \eta_0)$ su $\ker \pi'_+ \oplus \ker \pi_-$.

Vediamo ora alcune conseguenze.

Sia $Z \subset \mathbb{R}^n$ una varietà $-n$ dimensionale C^∞ con bordo $\partial Z \neq \emptyset$ e sul cilindro $\mathbb{R}_t \times Z$ si consideri l'operatore:

$$P = \sum_{|\alpha|+k \leq m} a_{\alpha k}(z,t) D_t^k D_z^\alpha, \quad a_{\alpha k} \in C^\infty(R_t \times Z), \quad m \geq 2.$$

Supponiamo:

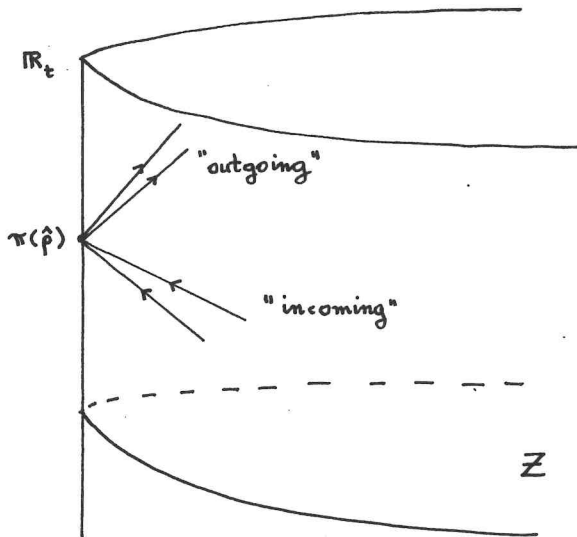
1° P strettamente iperbolico rispetto a t

2° $R_t \times \partial Z = \partial(R_t \times Z)$ non è caratteristica per P.

Indichiamo con $\Sigma \subset \{(t,z;\tau,\zeta) \in \mathbb{T}^*(R_t \times Z) \setminus 0\}$ la varietà caratteristica di P e sia $\hat{\rho} \in \mathbb{T}^*(R_t \times \partial Z)$ tale che $(i^*)^{-1}(\hat{\rho}) \cap \Sigma$ consiste esattamente di k punti distinti ($1 \leq k \leq m$). Dette $\gamma_1(\hat{\rho}), \dots, \gamma_k(\hat{\rho})$ le bicaratteristiche associate, t non è costante su queste. Siano:

$\gamma_1(\hat{\rho}), \dots, \gamma_{k_0}(\hat{\rho})$ le bicaratteristiche "incoming" (i.e. t(s) decresce su $\gamma_j(\hat{\rho})$ al crescere di s),

$\gamma_{k_0+1}(\hat{\rho}), \dots, \gamma_k(\hat{\rho})$ le bicaratteristiche "outgoing" (i.e. t(s) cresce al crescere di s):



Sia $u \in D'_0(R_t \times Z)$, $Pu \in C^\infty(R_t \times Z)$, $u = 0$, $t \ll 0$. Da noti risultati (cfr. Duistermaat-Hörmander [2]) segue che $WF(u)|_{R_t \times \dot{Z} \cap \gamma_j(\hat{\rho})} = \emptyset$,

$j = 1, 2, \dots, k_0$. Ci si domanda sotto quali condizioni avremo anche
 $WF(u|_{R_t \times Z}) \cap \gamma_j(\hat{\rho}) = \emptyset$ per $i = k_0 + 1, \dots, k$.

Supponiamo che u soddisfi condizioni al contorno del tipo

$$(2.13) \quad B_j u|_{R_t \times Z} = \sum_{|\alpha|+k \leq m-1} b_{j\alpha k}(z, t) D_z^\alpha D_t^j u|_{R_t \times Z} = g_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

(i coefficienti sono, naturalmente, C^∞).

Per potere applicare il T. 2.2., sia $\hat{\rho} = (\hat{t}, \hat{z}, \hat{\tau}, \hat{\zeta}) \in T^*(R_t \times Z) \setminus 0$.
 Supponiamo che $R_t \times Z$ sia definita localmente, vicino a (\hat{t}, \hat{z}) , da $x \geq 0$
 in un sistema di coordinate $(x, y = (y_1, \dots, y_n))$; $\hat{\rho}$, nelle nuove coordinate
 sar : $\hat{\rho} = (0, \hat{y}, 0, \hat{\eta})$ e, detto $p(x, y, \xi, \eta)$ il simbolo principali di P nel
 le nuove coordinate, l'equazione

$$C \ni \xi \rightarrow p(0, \hat{y}, \xi, \hat{\eta}) = 0$$

ha k radici reali distinte, sicch  $p(0, \hat{y}, \xi, \hat{\eta})$ si fattorizza:

$$p(0, \hat{y}, \xi, \hat{\eta}) = \prod_{j=1}^{k_0} (\xi - \xi_j) \prod_{j=k_0+1}^k (\xi - \xi_j) q(\xi)$$

con $q(\xi, \hat{y}, \hat{\eta})$ priva di zeri reali.

Poniamo:

$$\tilde{p}(\xi; \hat{y}, \hat{\eta}) = \prod_{j=k_0+1}^k (\xi - \xi_j(\hat{y}, \hat{\eta})) q(\xi; \hat{y}, \hat{\eta})$$

e consideriamo l'operatore differenziale ordinario $\tilde{p}(D_x; \hat{y}, \hat{\eta})$.

Utilizzando le nuove coordinate, detto $b_j(x, y, \xi, \eta)$ $j = 0, 1, \dots, m-1$ il simbolo principale di B_j , supponiamo che il sistema

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p} (D_x; \tilde{y}, \tilde{\eta}) \phi(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad \sup_{x \geq 0} |\phi(x)| < +\infty, \\ b_j(0, \tilde{y}; D_x, \tilde{\eta}) \phi(x) \Big|_{x=0} = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{array} \right.$$

abbia solo la soluzione nulla. Allora se $\hat{p} \notin \bigcup_{j=0}^{m-1} WF(g_j)$, ne segue che $\hat{p} \notin WF_b(u)$ e quindi che $WF(u|_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}}) \cap \gamma_j(\hat{p}) = \emptyset$ per $j = k_0+1, \dots, k$.

Ragionando nelle coordinate x, η , riduciamo l'equazione $Pu = f$ ad un sistema $m \times m$, $D_x v = A(x, y, D_y) v + F$, come all'inizio del § 2.

Se, nelle nuove coordinate: $B_j = \sum_{|\alpha|+k \leq m-1} b_{j\alpha k}(x, y) D_x^k D_y^\alpha$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, allora

$$\begin{aligned} B_j &= \sum_{|\alpha|+k \leq m-j-1} b_{j\alpha k}(x, y) D_y^\alpha \Lambda^{-m+k+1} D_x^k \Lambda^{m-k-1} = \\ &= \sum_{|\alpha|+k \leq m-1} b_{j\alpha k}(x, y) D_y^\alpha \Lambda^{-m+k+1} v_{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{jk}(x, y, D_y) v_{k+1}, \quad \beta_{jk} \in OPS^\circ. \end{aligned}$$

Posto

$$B(y, D_y) = \begin{pmatrix} \beta_{00}(0, y, D_y) & \dots & \beta_{0m-1}(0, y, D_y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m-1,0}(0, y, D_y) & \dots & \beta_{m-1,m-1}(0, y, D_y) \end{pmatrix},$$

abbiamo dunque:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (D_x - A(x, y, D_y)) v = F, \quad x \geq 0 \\ B v \Big|_{x=0} = G. \end{array} \right.$$

Per ipotesi F è C^∞ fino al bordo e $(y_0, \eta_0) \notin WF(G)$.

E' facile vedere che la condizione (2.14) equivale, in questo caso, a supporre che, con le not. del T. 2.2, $\sigma_0(B)(y_0, \eta_0) : \text{Im } \Pi'' \oplus \text{Im } \Pi' \rightarrow C^m$ è iniettiva e quindi la tesi.

Ad esempio consideriamo in $M = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid x \geq 0\}$ il problema (di derivata obliqua generalizzata per il D'Alambertiano):

$$(2.16) \quad \begin{cases} -D_{y_1}^2 - (D_x^2 + \sum_{j=2}^m D_{y_j}^2) u = 0 & , u \in \mathcal{D}'(M) \\ u|_{y_1 < 0} = 0 \\ (\alpha D_x + \sum_{j=1}^m \beta_j D_{y_j} u + \gamma u)|_{x=0} = g(y) \in \mathcal{D}'(\partial M), g|_{y_1 < 0} = 0. \end{cases}$$

Sia $(0, \hat{y}, 0, \hat{\eta}) \in T^* \partial M \setminus 0$ e si prenda il polinomio:

$$-\xi^2 + \hat{\eta}_1^2 - \sum_{j=2}^m \hat{\eta}_j^2$$

Se $|\hat{\eta}_1| > \sqrt{\sum_{j=2}^n \hat{\eta}_j^2}$, abbiamo due radici reali e distinte:

$$\lambda_1(\hat{\eta}) = \sqrt{\hat{\eta}_1^2 - \sum_{j=2}^n \hat{\eta}_j^2} = \mu(\hat{\eta}), \quad \lambda_2(\hat{\eta}) = -\sqrt{\hat{\eta}_1^2 - \sum_{j=2}^n \hat{\eta}_j^2} = -\mu(\hat{\eta})$$

e le due bicaratteristiche (entranti in M):

$$s \rightarrow \begin{cases} \gamma_1(s; \hat{y}, \hat{\eta}) = (s, \hat{y} - (\nabla_{\hat{\eta}} \mu)(\hat{\eta})s, \mu(\hat{\eta}), \hat{\eta}) \\ \gamma_2(s; \hat{y}, \hat{\eta}) = (s, \hat{y} + (\nabla_{\hat{\eta}} \mu)(\hat{\eta})s, -\mu(\hat{\eta}), \hat{\eta}) \end{cases}, \quad s \geq 0.$$

Poiché, nei 2 casi si ha, rispettivamente:

$$\begin{cases} y_1(s) = \hat{y}_1 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \hat{\eta}_1}\right)(\hat{\eta}) s = \hat{y}_1 - \hat{\eta}_1 s \\ y_1(s) = \hat{y}_1 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \hat{\eta}_1}\right)(\hat{\eta}) s = \hat{y}_1 + \hat{\eta}_1 s \end{cases}$$

abbiamo che γ_1 è incoming e γ_2 outgoing se $\hat{\eta}_1 > 0$ (se $\hat{\eta}_1 < 0$, si scambiano).

Ora u è C^∞ lungo γ_1 . La condizione (2.14) diviene la seguente

$$\begin{cases} (D_x + \mu(\hat{\eta}))\phi(x) = 0, & x > 0 \\ \alpha(\hat{y}) D_x \phi + \langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle \phi \Big|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla se $\sup_{x \geq 0} |\phi(x)| < +\infty$.

Ora la soluzione di $(D_x + \mu(\hat{y}))\phi(x) = 0$ è del tipo $y(x) = c e^{-i\mu(\hat{y})x}$, $c \in \mathbb{C}$. Dunque deve essere $c = 0$, i.e.

$$(2.17) \quad -\alpha(\hat{y})\mu(\hat{\eta}) + \langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle \neq 0 \quad (\text{caso } \hat{\eta}_1 > 0).$$

Nel caso $\hat{\eta}_1 < 0$ la condizione diviene

$$(2.17)' \quad \alpha(\hat{y})\mu(\hat{\eta}) + \langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle \neq 0 \quad (\text{caso } \hat{\eta}_1 < 0).$$

Se $\langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle - \alpha(\hat{y})\mu(\hat{\eta}) \neq 0$ avremo che γ_2 è disgiunta da $WF(u)$.

Sia $\beta_1(\hat{y})\hat{\eta}_1 + \sum_2^n \beta_j(\hat{y})\hat{\eta}_j - \alpha(\hat{y})\mu(\hat{\eta}) \neq 0$ e

$$-\beta_1(\hat{y})\hat{\eta}_1 + \sum_2^n \beta_j(\hat{y})\hat{\eta}_j + \alpha(\hat{y})\mu(\hat{\eta}) = 0$$

allora

$$2 \sum_2^n \beta_j(\hat{y})\hat{\eta}_j = 0.$$

Dunque se $\sum_2^n \beta_j(\hat{y})\hat{\eta}_j \neq 0$ e se vale (2.17) o (2.17)' ne segue che $\gamma_2 \cap WF(u) = \emptyset$ quale che sia il segno di $\hat{\eta}_1$. Se $\alpha(\hat{y}) = 0$ la condizione $\langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle \neq 0$ assicura che valr (2.17) (e (2.17)').

Su questo esempio vogliamo mettere in evidenza che, in generale, la condizione 3° del T. 2.2. esprime solo una condizione sufficiente per la riflessione.

In effetti microlocalmente si ha

$$(D_x - \mu(D_y))(D_x + \mu(D_y))u = 0, \quad x \geq 0$$

e quindi, posto $u_1 = \Lambda u$, $u_2 = D_x u$ si ha:

$$D_x u_1 = \Lambda u_2, \quad D_x u_2 = D_x^2 u = (D_{y_1}^2 - \sum_{j \geq 2} D_{y_j}^2) \Lambda^{-1} u_1,$$

i.e.

$$\left\{ \begin{aligned} D_x \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \Lambda \\ (D_{y_1}^2 - \sum_{j \geq 2} D_{y_j}^2) \Lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} &= \left(\sum_1^n \beta_j(y) D_{y_j} \Lambda^{-1 + \gamma(y)} \Lambda^{-1} \right), \alpha \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \\ &= g(y). \end{aligned} \right.$$

Si supponga pure di prendere $(\hat{y}, \hat{\eta})$ con $\hat{\eta}_1^2 > \sum_2^n \hat{\eta}_j^2$, $\hat{\eta}_1 > 0$, sicché γ_1 è disgiunta da $WF(u)$.

Sia

$$\phi(y, D_y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu(D_y) \Lambda^{-1} & -\mu(D_y) \Lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\phi(y, D_y)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \Lambda \frac{1}{\mu} (D_y) \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \Lambda \frac{1}{\mu} (D_y) \end{bmatrix}$$

(i.e. $\phi \phi^{-1} \sim 1$).

Poniamo

$$v = \phi^{-1} u$$

Allora

$$D_x v = \begin{bmatrix} \mu(D_x) & \\ & -\mu(D_x) \end{bmatrix} v$$

e

$$B \phi v = \left(\sum_1^n \beta_j(y) D_{y_j} \Lambda^{-1} + \gamma(y) \Lambda^{-1} \right) \alpha(y).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu(D_y) \Lambda^{-1} & -\mu(D_y) \Lambda^{-1} \end{pmatrix} v =$$

$$= (\sum \beta_j(y) D_{y_j} \Lambda^{-1} + \gamma(y) \Lambda^{-1} + \alpha(y) \mu(D_y) \Lambda^{-1})$$

$$\sum \beta_j(y) D_{y_j} \Lambda^{-1} + \gamma(y) \Lambda^{-1} - \alpha(y) \mu(D_y) \Lambda^{-1}) v = g,$$

ora ci basta sapere che l'operatore ψ è:

$$(-\alpha(y) \mu(D_y) + \sum_1^n \beta_j(y) D_{y_j}) + \gamma(y)$$

è microipoellittico in $(\hat{y}, \hat{\eta})$. Ciò è senz'altro vero se $-\alpha(\hat{y}) \mu(\hat{\eta}) + \langle \beta(\hat{y}), \hat{\eta} \rangle \neq 0$, d'altra parte può essere anche se il simbolo principale è $= 0$.

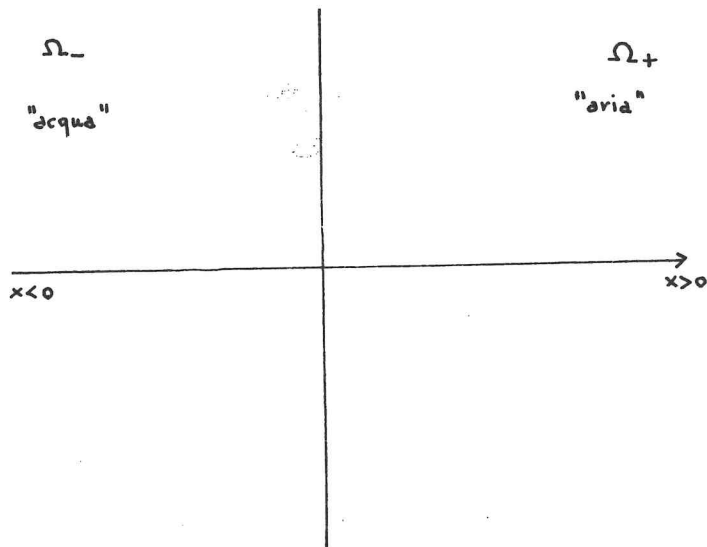
Ad es. se $\theta(y, \eta) = -\alpha(y) \mu(\eta) + \langle \beta(y), \eta \rangle$ è complessa e se

$$\frac{1}{2} (\partial_y \theta \cdot \partial_{\bar{\eta}} \bar{\theta} - \partial_y \bar{\theta} \cdot \partial_{\eta} \theta) > 0 \text{ in } (\hat{y}, \hat{\eta}),$$

allora l'operatore è microipoellittico.

Vediamo un'ulteriore esempio:

Si consideri in $R_x \times R_y^n$ il problema di trasmissione:



$$\left\{ \begin{array}{l} \square u_+ = (D_{y_1}^2 - (D_x^2 + \sum_{j=2}^n D_{y_j}^2)) u_+ = 0, \quad x > 0 \\ \square_c u_- = \left(\frac{1}{c^2} D_{y_1}^2 - (D_x^2 + \sum_{j=2}^n D_{y_j}^2) \right) u_- = 0, \quad x < 0, \quad 0 < c < 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_+ - u_- \Big|_{x=0} = g_0 \\ \partial_x u_+ - \partial_x u_- \Big|_{x=0} = g_1 \end{array} \right.$$

Posto $\tilde{u}_-(x, y) = u_-(-x, y)$, $x \geq 0$,

ciò equivale a studiare

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} \square & \\ & \square_c \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_+ \\ \tilde{u}_- \end{pmatrix} = 0, \quad x > 0, \\ u_+ - \tilde{u}_- \Big|_{x=0} = g_0 \\ \partial_x u_+ + \partial_x \tilde{u}_- \Big|_{x=0} = g_1. \end{array} \right.$$

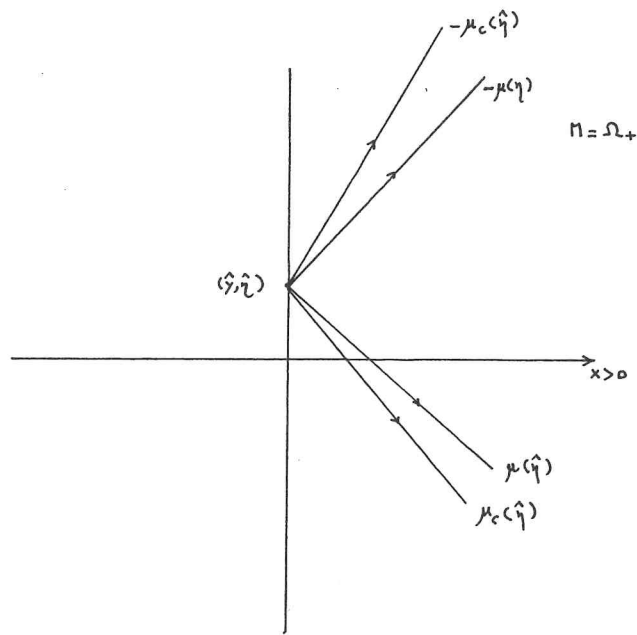
Dato $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in T^* \partial M \setminus 0$ supponiamo che $\hat{\eta}_1^2 > \sum_{j \geq 2} \hat{\eta}_j^2$ oppure che

$\frac{1}{c^2} \hat{\eta}_1^2 > \sum_{j \geq 2} \hat{\eta}_j^2$. Allora, abbiamo due casi possibili:

a) Se $\hat{\eta}_1^2 > \sum_{j \geq 2} \hat{\eta}_j^2$, posto $\mu(\hat{\eta}) = (\hat{\eta}_1^2 - \sum_{j \geq 2} \hat{\eta}_j^2)^{1/2}$ e

$$\mu_c(\hat{\eta}) = (\hat{\eta}_1^2 - c^2 \sum_{j \geq 2} \hat{\eta}_j^2)^{1/2},$$

ci sono 4 bicaratteristiche entranti in M:



b) Se $\hat{n}_1^2 > c^2 \sum_{j \geq 2} \hat{n}_j^2$, ma $\hat{n}_1^2 < \sum_{j \geq 2} \hat{n}_j^2$,

ci sono solo le 2 bic. corrisp. a $\mu_c(\hat{n})$ e $-\mu_c(\hat{n})$

(fisicamente: se il raggio di incidenza è piccolo non c'è rifrazione, ma riflessione totale!).

Con la consueta riduzione a sistema si ha, nel caso a):

$$D_x \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \wedge & 0 \\ (D_{y_1}^2 - \sum_{j \geq 2} D_{y_j}^2) \wedge & 0 & 0 \\ 0 & \wedge & 0 \\ \frac{1}{c^2} D_{y_1}^2 - \sum_{j \geq 2} D_{y_j}^2 & \wedge & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda g_0 \\ \\ \\ i g_1 \end{bmatrix}$$

Posto

$$\Phi(y, D_y) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ \mu(D_y) \Lambda^{-1} & & -\mu(D_y) \Lambda^{-1} & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \mu_c(D_y) \Lambda^{-1} & & & -\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} \end{array} \right]$$

e $v = \Phi^{-1} u$, si ha

$$D_x v = \left[\begin{array}{c} \mu(D_y) \\ -\mu(D_y) \\ \mu_c(D_x) \\ -\mu_c(D_y) \end{array} \right] v$$

e

$$\tilde{B} = B \Phi v = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & \\ i\mu(D_y) \Lambda^{-1} & -i\mu(D_y) \Lambda^{-1} & i\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} & -i\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} & v = \tilde{u} \end{array} \right]$$

ora $\ker \sigma_0(\tilde{B})(\hat{y}, \hat{\eta})$ ha dim. 2 e possiamo facilmente esaminare la riflessione. In particolare se u è regolare lungo i 2 raggi in Ω_+ (ovvero Ω_-), oppure se u è regolare lungo 1 raggio in Ω_+ e 1 raggio in Ω_- e se $(\hat{y}, \hat{\eta}) \notin WF(g_0)u$ e $WF(g_1)$, allora u_2 è regolare lungo tutti i raggi. Nel caso b) si ha, posto $\theta(\eta) = \sqrt{\sum_{j \geq 2} \eta_j^2 - \eta_j}$ e

$$\Phi(y, D_y) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ i\theta(D_y) \Lambda^{-1} & & -i\theta(D_y) \Lambda^{-1} & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \mu_c(D_y) \Lambda^{-1} & & & -\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} \end{array} \right]$$

definendo ancora $v = \phi^{-1}u$, avremo:

$$D_x v = \begin{bmatrix} i\theta(D_y) & & & \\ & -i\theta(D_y) & & \\ & & \mu_c(D_x) & \\ & & & -\mu_c(D_y) \end{bmatrix} v$$

e

$$\tilde{B} = B \phi v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -\theta(D_y) \Lambda^{-1} & \theta(D_y) \Lambda^{-1} & i\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} & -i\mu_c(D_y) \Lambda^{-1} \end{bmatrix} v = \tilde{g},$$

e ancora $\ker \sigma_o(\tilde{B}) (\hat{y}, \hat{\eta})$ ha dim. 2 e, in particolare se u è regolare lungo uno dei raggi in Ω allora lo è anche lungo l'altro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. CHAZARAIN - Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12 (1977), 39-52.
- [2] J. DUISTERMAAT-L. HÖRMANDER - Acta Math., 128 (1972), 183-269.
- [3] L. HÖRMANDER - Linear Partial Differential Operators - Springer Verlag 1963.
- [4] L. HÖRMANDER - Ann. of Math., 83 (1966), 129-209.
- [5] L. HÖRMANDER - Acta Math., 127 (1971), pp. 79-183.
- [6] A. MAJDA-S. OSHER - Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 479-499.
- [7] R. MELROSE-J. SjöSTRAND - Comm. Pure Appl. Math., 31 (1978), 593-617.
- [8] M. TAYLOR - Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 457-478.
- [9] M. TAYLOR - Pseudo-differential operators - Springer Lecture Notes in Math. 416.